$\star$

Exercice 1

Déterminer la nature des intégrales impropres suivantes :

a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x+2}}\,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{(x+1)(x+2)}}\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^5+1}\,\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2\ln x}\,\mathrm{d}x$

e) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x+1}\,\mathrm{d}x$

f) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x\,\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{d}x$

g) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x+1}\,\mathrm{d}x$

h) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\,\mathrm{e}^x+1}{x\,\mathrm{e}^{2x}+1}\,\mathrm{d}x$

$\star$

Exercice 2

Déterminer la nature des intégrales impropres suivantes :

a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}\,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{x^3+1}}\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{\sin^3 x}{x^2}\,\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^x\cos x\,\mathrm{d}x$

e) $\displaystyle\int_0^{\pi} \ln(2x+3\sin x)\,\mathrm{d}x$

f) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^4\,\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$

$\star$

Exercice 3

1) Montrer que pour tout réel $a>-1$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^a\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge.

2) Montrer que pour tout réel $a>-1$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{1} t^a\ln(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

3) Montrer que pour tout réel $a>-1$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{a-t}\,\mathrm{d}t$ converge.

$\star$

Exercice 4

Pour chacune des intégrale suivante montrer qu'elle converge et la calculer :

1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} 2^{-|x|}\,\mathrm{d}x$

2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{3}{4+x^2}\,\mathrm{d}x$

3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2}\,\mathrm{d}x$

4) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^7\,\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$

5) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}(1-\mathrm{e}^{-x})^4\,\mathrm{d}x$

6) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x$

$\star\ \star$

Exercice 5

Le but de cet exercice est de démontrer la formule de Stirling : $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\dfrac{n^n}{\mathrm{e}^n}$.

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ on pose $u_n = \dfrac{n!}{\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n\sqrt{n}}$ et $v_n = \ln u_n$.

1) a) À l'aide d'un développement limité, montrer que $v_n - v_{n+1} \underset{n\to+\infty}{=} \dfrac{1}{12n^2} + \left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.
   b) En déduire que la suite (v_n) converge.
   c) En déduire l'existence d'un réel $C>0$ tel que $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} C\sqrt{n}\dfrac{n^n}{\mathrm{e}^n}$.

2) Montrons dans cette question que $C=\sqrt{2\pi}$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\,\mathrm{d}x$ (intégrale de Wallis)
   a) Calculer W_0 et W_1.
   b) Montrer que (W_n) converge.
   c) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t$
   d) En déduire W_2.

e) À l'aide d'une intégration par partie, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} W_n$.

f) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+1)W_n W_{n+1} = \dfrac{\pi}{2}$.

g) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} W_n = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{W_n}{W_{n+1}} = 1$, et $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} W_n = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$.

h) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_{2n} = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \dfrac{\pi}{2}$.

i) En déduire que $C = \sqrt{2\pi}$.

$\star\star$

Exercice 6

1) Montrer à l'aide du changement de variable $x = \mathrm{e}^u$ que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(\mathrm{e}^u)\,\mathrm{d}u$ converge.

2) Montrer à l'aide du changement de variable $t = u^{1/3}$ que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u^{2/3} + u^{4/3}}$ converge et la calculer.

$\star\star$

Exercice 7

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $\sin(n\theta) \neq 0$. On considère le polynôme $P(X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \sin(k\theta) X^k$

1) Montrer que $P(X) = \dfrac{1}{2i}(1 + \mathrm{e}^{i\theta} X)^n - \dfrac{1}{2i}(1 + \mathrm{e}^{-i\theta} X)^n$

2) En déduire que λ est racine du polynôme P si et seulement si $\exists k \in [\![0, n-1]\!]$, $\lambda = \dfrac{\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1}{\mathrm{e}^{i\theta} - \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}} \mathrm{e}^{-i\theta}}$.

3) Montrer que toutes les racines de P sont réelles.

$\star\star$

Exercice 8

On considère la suite (u_n) définie par $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = u_n + \left(\ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right)\right)^2$.
Le but de cet exercice est de déterminer un équivalent de u_n lorsque $n \to +\infty$. On admet le théorème de Cesàro :

$$\text{Si } \lim_{n\to+\infty} a_n = \ell \text{ avec } \ell \in \mathbb{R} \text{ alors } \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k = \ell$$

1) Montrer que la suite (u_n) est bien définie.

2) Étudier le sens de variation de (u_n) puis montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

3) Soit β un réel non nul. Montrer que $u_{n+1}^{\beta} - u_n^{\beta} = \beta u_n^{\beta-3} + o(u_n^{\beta-3})$.

4) Déterminer une valeur de β telle que $u_{n+1}^{\beta} - u_n^{\beta}$ converge vers une limite finie.

5) En déduire à l'aide du théorème admis que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt[3]{3n}$.

$\star\star$

Exercice 9

Pour tout $x \in]0; +\infty[$, on appelle **fonction Gamma d'Euler** la fonction définie par $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\, t^{x-1}\,\mathrm{d}t$.

1) Montrer que Γ est bien définie sur $]0; +\infty[$.

2) Montrer que pour tout $x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$

3) Calculer $\Gamma(1)$ puis en déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n+1) = n!$

4) Calculer $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ puis $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$. On pourra admettre la valeur de l'intégrale de Gauss : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Le coin des Khûbes

⋆ ⋆

Exercice 10

(ENSAE 2013) Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction continue. On suppose qu'il existe une constante $0 < c < 1$ telle que, pour tous x, y dans $[0,1]$,

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|$$

Démontrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution dans $[0,1]$.

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 11

(ENS 2016) Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $f(x)f(y) \leq f(xy)$ pour tout $x, y \geq 0$ et $f(1) = 1$.

1) Montrer que $f(x) \geq 0$ pour tout $x \geq 0$
2) Montrer que $f(x) \geq f(x^{1/n})^n$ pour tout $x > 0$ et $n \geq 1$
3) En déduire qu'il existe un réel p tel que $f(x) \geq x^p$ pour tout $x \geq 0$
4) Montrer que $p \geq 0$
5) Montrer que $f(x) = x^p$ pour tout $x \geq 0$.

⋆ ⋆

Exercice 12

(ENS 2025)
Démontrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$ l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1-\cos(at)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ est convergente, puis qu'il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout $a \in \mathbb{R}$ on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1-\cos(at)}{t^2} = c|a|$$